1. Титульный лист

Оглавление

[1. Математическая постановка задачи. 3](#_Toc33551754)

[2. Описание численного метода реализации задачи. 5](#_Toc33551755)

[3. Описание ручного счета тестового примера предложенным методом 7](#_Toc33551756)

[4. Разработка алгоритмов решения задачи 9](#_Toc33551757)

[5. Листинг программы 12](#_Toc33551758)

[6. Результат работы программы 13](#_Toc33551759)

[7. Результат реализации метода с помощью встроенных функций 14](#_Toc33551760)

[8. Сравнение результатов 15](#_Toc33551761)

[9. Заключение 16](#_Toc33551762)

[10. Список литературы 17](#_Toc33551763)

# Математическая постановка задачи.

Любая неоднородная система линейных уравнений может быть представлена в виде уравнения , где А – матрица (1), составленная из коэффициентов при неизвестных ; B – матрица (3), составленная из свободных коэффициентов , Х - матрица (2), составленная из неизвестных .

(1)

(2)

(3)

Решение системы линейных уравнений – это совокупность коэффициентов, с которыми столбец свободных членов раскладывается по столбцам матрицы системы [1].

Количество решение неоднородной системы линейных уравнений зависит от ранга матрицы. Если базисный минор системы равен определителю матрицы (1), т.е. все столбцы матрицы (1) линейно независимы, то система не может иметь двух различных решений (она либо несовместна, либо имеет единственное решение). Если базисный минор системы меньше определителя матрицы (1) (определитель матрицы (1) при этом равен нолю), то система имеет бесконечное количество решений. Решения неоднородной системы линейных уравнений из *i* уравнений с *j* неизвестными и рангом матрицы *r* в этом случае принимают вид (4), где принимают произвольные значения.

(4)

Задача состоит в решении неоднородной системы линейных уравнений вида (5) методом Гаусса.

(5)

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения переменных) позволяет найти решение системы линейных уравнений, если она совместна или установить ее несовместность [2].

Алгоритм решения системы методом Гаусса производится в два этапа.

*Первый этап (прямой ход).*

Система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду (6). Если в процессе приведения системы появляются нулевые уравнения, т.е. уравнения вида 0 = 0, то такие уравнения отбрасываются (в этом случае можно заключить, что система будет иметь бесконечное число решений), а если появляются уравнения вида 0 = , где ≠ 0, то выполнение алгоритма прекращается и делается вывод, что система несовместна, т.е. решений нет [2].

(6)

*Второй этап (обратный ход).*

В системе (6) неизвестные с номерами, соответствующими первым ненулевым элементам в каждой строке, оставляются в левой части, а остальные переносятся в правую часть [2]. Далее, начиная с последней строки системы, последовательно находятся неизвестные – ранг матрицы (1).

# Описание численного метода реализации задачи.

Численные методы решения системы (5) можно разбить на прямые и итерационные. Прямые позволяют за конечное число действий получить точное решение, если входная информация (правая часть уравнений и элементы матрицы (1)) заданы точно и вычисления ведутся без округления [3]. Метод Гаусса относится к прямым методам.

Процесс численного решения системы линейных уравнений методом Гаусса состоит из двух этапов.

*Первый этап (прямой ход).*

Пусть ведущий элемент не равен нолю. Разделив первое уравнение системы (5) на получим новое уравнение (7), где .

(7)

Исключим переменную из каждого уравнения системы (5), начиная со второго, путем вычитания уравнения (7), умноженного на коэффициент при в соответствующем уравнении системы (5), получим систему (8), где .

(8)

Далее, если ведущий элемент второй строки системы (8) не равен нолю, разделив на него вторую строку системы (8), получим уравнение (9), где , *j* = 3, 4, 5.

(9)

Исключив переменную из каждого уравнения системы (8), начиная с третьего, путем вычитания уравнения (9), умноженного на коэффициент при в соответствующем уравнении системы (8), получим систему (10), где .[4]

(10)

Продолжая рассуждения, получим уравнения вида (9) для переменных и и в итоге приходим к системе ступенчатого типа (11).

(11)

Из вышесказанного можно увидеть, что первый этап метода Гаусса можно свести к элементарным преобразованиям расширенной матрицы системы (5), при этом на каждом шаге при исключении из уравнений системы (5), из каждой строки начиная с -ой вичитается -я строка умноженная на , а элементы строки делятся на элемент , где – номер исключаемой переменной.

*Второй этап (обратный ход).*

На этом этапе находится решение неоднородной системы линейных уравнений. Неизвестные найдем из полученной приведенной системы (10) в обратном порядке, последовательно подставляя уже найденные значения в предшествующие уравнения:

(12)

***Численный способ решения методом Гаусса применим, когда все главные миноры отличны от ноля [3], так как иначе, как было сказано выше, уравнение имеет бесконечное количество корней.***

Подсчитаем число выполняемых арифметических действий для системы с неизвестными. При исключении неизвестной производится делений коэффициентов первого уравнения на коэффициент при , а также по умножений и вычитаний при исключении их последующий уравнений. Общее число арифметических действий при исключении . Для получим аналогичные вычисления с той разницей, что вычисления производятся для переменных, т.е. . В общем случае для любого получим число арифметических операций [4].

Общее число арифметических операций в ходе решения системы линейных уравнений методом Гаусса равно:

(13)

Так как имеют место такие равенства (14) и (15) [4]:

(14)

(15)

то количество арифметических операций *Q* при решении системы уравнений с неизвестными методом Гаусса находится по формуле:

Для имеем арифметических операции.

# Описание ручного счета тестового примера предложенным методом

Дана неоднородная система линейных уравнений (16).

(16)

Проведем ручной счет методом Гаусса. Округление будем вести до четвертого знака после запятой.

*Первый этап (прямой ход).*

Составим расширенную матрица неоднородной системы линейных уравнений (16).

(17)

Коэффициент не равен нолю. Исключим из матрицы (17) неизвестную . Для этого разделим первую строку матрицы (17) на , а из остальных строк вычтем первую умноженную на . Получим матрицу (18).

(18)

Далее исключим из полученной матрицы (18) переменную . Коэффициент не равен нолю. Разделим вторую строку матрицы (18) на , а из третьей и четвертой строк вычтем вторую умноженную на . Получим матрицу (19).

(19)

Далее исключим из полученной матрицы (19) переменную . Коэффициент не равен нолю. Разделим третью строку матрицы (19) на , а из четвертой строки вычтем третью умноженную на . Получим матрицу (20).

(20)

Далее разделим четвертую строку полученной матрицы (20) на . Получим матрицу (21).

(21)

Как можно увидеть в результате элементарных преобразований над расширенной матрицей (17) системы линейных уравнений (16) получена приведенная к треугольному виду система линейных уравнений (21)

(22)

*Второй этап (обратный ход).*

Из четвертого уравнения системы (22) получим значение .

Далее подставим в третье уравнение системы (22). Получим значение .

Далее подставим во второе уравнение системы (22). Получим значение .

Дале подставим в первое уравнение и окончательно получим значение

Система линейных уравнений решена.

Полученные значения неизвестных для выбранных коэффициентов:

;

;

;

.

# Разработка алгоритмов решения задачи

Как можно увидеть в пункте 2 численный метод решения системы методом Гаусса заключается в последовательной замене на каждом этапе элементов срок, следующих за строкой, где исключаемый элемент находится на главной диагонали, на значения , где *i* – номер неизвестной, исключаемой на данном шаге [4].

Алгоритм, как и ручной счет состоит их двух частей – прямого хода и обратного хода.

На первом этапе происходит приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Приведение осуществляется с применением основного и двух вложенных циклов с заданным числом повторений, так как разрядность матрицы и число переменных заранее известно [5]. В основном цикле определяется исключаемая на данном этапе переменная и выполняется проверка на три исключительных случая. Первый вложенный цикл пробегает по каждой строке расширенной матрицы, начиная со следующей после той, которая имеет индекс равный индексу обрабатываемой переменной. Второй внутренний цикл меняет значения каждого элемента в текущей строке.

На втором этапе, когда матрица приведена к ступенчатому виду, поочередно находятся неизвестные, из которых составляется вектор – решение системы, так как заранее известен вид ступенчатой матрицы системы и исключено появление уравнений вида .

численный метод ограничений на накладывает.

Рассмотрим ограничения, которые накладывает метод Гаусса на входные данные и процесс вычисления.

Первым этапом алгоритма вычисления системы является ввод пользователем матрицы коэффициентов при неизвестных и вектор свободных членов. Значения коэффициентов при неизвестных, а также значения вектора свободных членов могут быть любыми вещественными числами, т.е. на ввод данных пользователем ограничений нет.

Как было сказано в пункте 1 при приведении системы к ступенчатому виду возможно появление уравнений тапа , где и уравнений тапа . Данные случаи приводят к появлению двух исключительных случаев, которые необходимо учесть при составлении алгоритма вычисления: в первом случае – система несовместна и решений нет, а во втором – система имеет бесконечное количество решений. Данные случаи проверяются на каждом шаге приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду путем сложения элементов рассматриваемой строки матрицы при неизвестных и сравнении полученной суммы с соответствующим элементом в векторе свободных членов.

Также возможен еще один исключительный случай. При приведении расширенной матрицы к ступенчатому виду может возникнуть ситуация, когда рассматриваемая строка имеет меньше ненулевых членов, чем последующие, т.е. коэффициент при исключаемой на данном шаге переменной, находящийся на главной диагонали расширенной матрицы, равен нолю. Данный случай также проверяется на каждом шаге приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду, путем последовательного перебора элементов в данном столбце расширенной матрицы и сравнении их с нолем. После проверки происходит обмен значений строки, где был найден ненулевой элемент и обрабатываемой строки и процесс приведения продолжается. Все номера строк, которые были обменены, сохраняются в массиве [2x4], так как худший случай при этом, когда обмениваются все строки по одной.

Кроме вышеупомянутого больше метод Гаусса никаких ограничений на вычисления не накладывает.

(еще раз переработать!)

Начало

Ввод матрицы коэффициентов системы;

Ввод вектора свободных членов;

Создание расширенной матрицы системы M

*1 Решение системы – прямой ход;*

*2 Решение системы – обратный ход;*

Вывод вектора – решения системы;

Конец

*//1 Решение системы – прямой ход*

Определение переменной i – номера исключаемой переменной;

Цикл-пока i < 5

Увеличение i на 1;

*1.1 Проверка строки на наличие исключительных случаев;*

*1.2 Проверка равен ли элемент на диагонали матрицы (M[i,i]) нолю;*

*1.3 Деление строки i на элемент М[i,i];*

*1.4 Исключение переменной из последующих строк;*

Кон цикл-пока

*//1.1 Проверка на наличие исключительных случаев*

Определить переменную err\_test=0;

Определить k=i;

Цикл-пока k<5

Увеличить k на 1;

Прибавить к переменной err\_test значение элемента M[i,k];

Кон цикл-пока

Если сумма элементов строки i, кроме последнего равна 0 и последний элемент строки равен 0

Вывести сообщение о бесконечном количестве решений;

Завершить программу;

Кон если

Если сумма элементов строки i, кроме последнего равна 0 и последний элемент строки не равен 0

Вывести сообщение о несовместности системы;

Завершить программу;

Кон если

*//1.2 Проверка равен ли элемент M[i,i] нолю*

Если элемент M[i,i] равен нолю

Определить временную переменную swap равную i+1;

Цикл-пока swap==0

Увеличить swap на 1;

Кон цикл-пока

*1.2.1 Обменять строки swap и i местами;*

Кон если

*//1.2.1 Обмен строк*

Определить k = 1;

Определить временную переменную temp;

Цикл-пока k<6

Увеличить k на 1;

Присвоить переменной temp элемент матрицы M[i,k];

Присвоить элементу матрицы M[i,k] значение элемента M[swap,k];

Присвоить элементу матрицы M[swap,k] значение переменной temp;

Кон цикл-пока

*//1.3 Деление строки на M[i,i]*

Определить temp = 0;

Сохранить значение элемента M[i,i] в переменной temp;

Определить k=i;

Цикл-пока k<6

Увеличить k на 1;

Разделить элемент M[i,k] на temp;

Кон цикл-пока

*//1.4 Исключение переменной из последующих строк системы*

Определить j=i+1;

Цикл-пока j<5;

Увеличить j на 1;

Определить temp = 0;

Сохранить элемент M[j,i] в temp;

Определить k=i;

Цикл-пока k<6

Увеличить k на 1;

Вычесть из элемента M[j,k] значение выражения M[i,k]\*temp;

Кон цикл-пока

Кон цикл-пока

*//2 Решение системы – обратный ход*

Определение вектора-решения V;

*2.1 Получение значения переменной из расширенной матрицы;*

*2.2 Получение значения переменной из расширенной матрицы;*

*2.3 Получение значения переменной из расширенной матрицы;*

*2.3 Получение значения переменной из расширенной матрицы;*

*//2.1 Получение значения переменной*

Присвоить значение M[4,5] элементу V[4];

*//2.2 Получение значения переменной*

Присвоить значение выражения M[3,5]-V[4]\*M[3,4] элементу V[3];

*//2.3 Получение значения переменной*

Присвоить значение выражения M[2,5]-V[4]\*M[2,4]-V[3]\*M[2,3] элементу V[2];

*//2.4 Получение значения переменной*

Присвоить значение выражения M[1,5]-V[4]\*M[1,4]-V[3]\*M[1,3]-V[2]\*M[1,2] элементу V[1];

*//Полный алгоритм*

Начало

Ввод матрицы коэффициентов системы;

Ввод вектора свободных членов;

Создание расширенной матрицы системы M

*//1 Решение системы – прямой ход*

Определение переменной i – номера исключаемой переменной;

Цикл-пока i < 5

Увеличение i на 1;

*//1.1 Проверка на наличие исключительных случаев*

Определить переменную err\_test=0;

Определить k=i;

Цикл-пока k<5

Увеличить k на 1;

Прибавить к переменной err\_test значение элемента M[i,k];

Кон цикл-пока

Если сумма элементов строки i, кроме последнего равна 0 и последний элемент строки равен 0

Вывести сообщение о бесконечном количестве решений;

Завершить программу;

Кон если

Если сумма элементов строки i, кроме последнего равна 0 и последний элемент строки не равен 0

Вывести сообщение о несовместности системы;

Завершить программу;

Кон если

*//1.2 Проверка равен ли элемент M[i,i] нолю*

Если элемент M[i,i] равен нолю

Определить временную переменную swap равную i+1;

Цикл-пока M[swap,i]==0

Увеличить swap на 1;

Кон цикл-пока

*//1.2.1 Обмен строк*

Определить k = 1;

Определить временную переменную temp;

Цикл-пока k<6

Увеличить k на 1;

Присвоить переменной temp элемент матрицы M[i,k];

Присвоить элементу матрицы M[i,k] значение элемента M[swap,k];

Присвоить элементу матрицы M[swap,k] значение переменной temp;

Кон цикл-пока

*//1.3 Деление строки на M[i,i]*

Определить temp = 0;

Сохранить значение элемента M[i,i] в переменной temp;

Определить k=i;

Цикл-пока k<6

Увеличить k на 1;

Разделить элемент M[i,k] на temp;

Кон цикл-пока

*//1.4 Исключение переменной из последующих строк системы*

Определить j=i+1;

Цикл-пока j<5;

Увеличить j на 1;

Определить temp = 0;

Сохранить элемент M[j,i] в temp;

Определить k=i;

Цикл-пока k<6

Увеличить k на 1;

Вычесть из элемента M[j,k] значение выражения M[i,k]\*temp;

Кон цикл-пока

Кон цикл-пока

Кон цикл-пока

*//2 Решение системы – обратный ход*

Определение вектора-решения V;

*//2.1 Получение значения переменной*

Присвоить значение M[4,5] элементу V[4];

*//2.2 Получение значения переменной*

Присвоить значение выражения M[3,5]-V[4]\*M[3,4] элементу V[3];

*//2.3 Получение значения переменной*

Присвоить значение выражения M[2,5]-V[4]\*M[2,4]-V[3]\*M[2,3] элементу V[2];

*//2.4 Получение значения переменной*

Присвоить значение выражения M[1,5]-V[4]\*M[1,4]-V[3]\*M[1,3]-V[2]\*M[1,2] элементу V[1];

Вывод вектора – решения системы;

Конец

# Листинг программы

Листинг программы, написанной без использования стандартных функций mathlab:

function no\_stand\_func\_prog

r = input("Введите матрицу коэффициентов при неизвестных:\n", 'a');

a = str2num(r);

r = input("Введите ветор свободных членов:\n", 'b');

b = str2num(r);

##Создание расширенной матрицы системы M

M = [a,b];

display("Расширенная матрица системы:");

M

##//1 Решение системы – прямой ход

for i=1:1:4

##//1.1 Проверка на наличие исключительных случаев

err\_test = 0;

for k=i:1:4

err\_test = err\_test+M(i,k);

endfor

if err\_test==0&&M(i,5)==0

display("Система имеет бесконечное число решений.\n");

return;

endif

if err\_test==0&&M(i,5)!=0

display("Система несовместна. Решений нет.\n");

return;

endif

##//1.2 Проверка равен ли элемент M[i,i] нолю

if M(i,i)==0

swap = i+1;

while M(swap,i)==0

++swap;

endwhile

##//1.2.1 Обмен строк

for k=1:1:5

temp = M(i,k);

M(i,k) = M(swap,k);

M(swap,k) = temp;

endfor

endif

##//1.3 Деление строки на M[i,i]

temp = M(i,i);

for k=i:1:5

M(i,k) = M(i,k)/temp;

endfor

##//1.4 Исключение переменной x\_i из последующих строк системы

for j=i+1:1:4

temp = M(j,i);

for k=i:1:5

M(j,k) = M(j,k)-M(i,k)\*temp;

endfor

endfor

endfor

##2 Решение системы – обратный ход

V = zeros(4,1);

##2.1 Получение значения переменной x\_4

V(4) = M(4,5);

##2.2 Получение значения переменной x\_3

V(3) = M(3,5)-V(4)\*M(3,4);

##2.3 Получение значения переменной x\_2

V(2) = M(2,5)-V(4)\*M(2,4)-V(3)\*M(2,3);

##2.4 Получение значения переменной x\_1

V(1) = M(1,5)-V(4)\*M(1,4)-V(3)\*M(1,3)-V(2)\*M(1,2);

##Вывод вектора – решения системы V;

display("Решение введенной системы линейных уравнений:");

display(V);

# Результат работы программы

Результат работы программы no\_stand\_func\_prog при заданных значениях:

Результат работы программы no\_stand\_func\_prog при бесконечном количестве решений системы:

Результат работы программы no\_stand\_func\_prog при несовместности системы:

# Результат реализации метода с помощью встроенных функций

Листинг программы, написанной с помощью стандартных функций mathlab:

Function stand\_func\_prog

##Ввод матрицы коэффициентов системы;

r = input("Введите матрицу коэффициентов при неизвестных:\n", 'a');

a = str2num(r);

##Ввод вектора свободных членов;

r = input("Введите вектор свободных членов:\n", 'b');

b = str2num(r);

#Решение системы методом Гаусса

V = a\b;

##Вывод вектора – решения системы V;

display("Решение введенной системы линейных уравнений:\n");

display(V);

Результат работы программы stand\_func\_prog при заданных значениях:

Результат работы программы stand\_func\_prog при бесконечном количестве решений системы:

Результат работы программы stand\_func\_prog при несовместности системы:

# Сравнение результатов

При реализации алгоритма решения системы линейных уравнений с помощью всторенных функций Mathcad и с помощью стандартных циклов результаты работы программ не отличаются. Различие состоит в количестве строк кода, используемых в реализация: при реализации алгоритма без использования встроенных функций mathlab количество набираемого кода заметно больше, что может привести к непреднамеренным ошибкам и опечаткам при создании алгоритма. В свою очередь при таком подходе представляется возможность создания более развернутого пользовательского интерфейса с развернутым описание исключительных случав работы программы, в то врем как реализация с использованием стандартных функций позволяет реализовывать пользовательский интерфейс только перед и после выполнения непосредственных расчетов, исключительные случаи же будут отображены стандартными ошибками, которые в дальнейшем можно обработать.

# Заключение

Выводы…

Разработанный алгоритм позволяет упростить расчет по сравнению с ручным счетом, избежать ошибок в вычислениях и увеличить точность вычислений до разрядности представления чисел в машине.

# Список литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. – 10-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с. – ISBN 5-9221-0304-0
2. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 208 с. – ISBN 978-5-9221-0860-7;
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. Учебные пособие для ВУЗов, - М., Наука, 1987, 288с.;
4. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
5. Иванова Г.С. Основы программирования: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 416 с.: ил. (Сер. Информатика в техническом университете.) ISBN 5-7038-1957-1